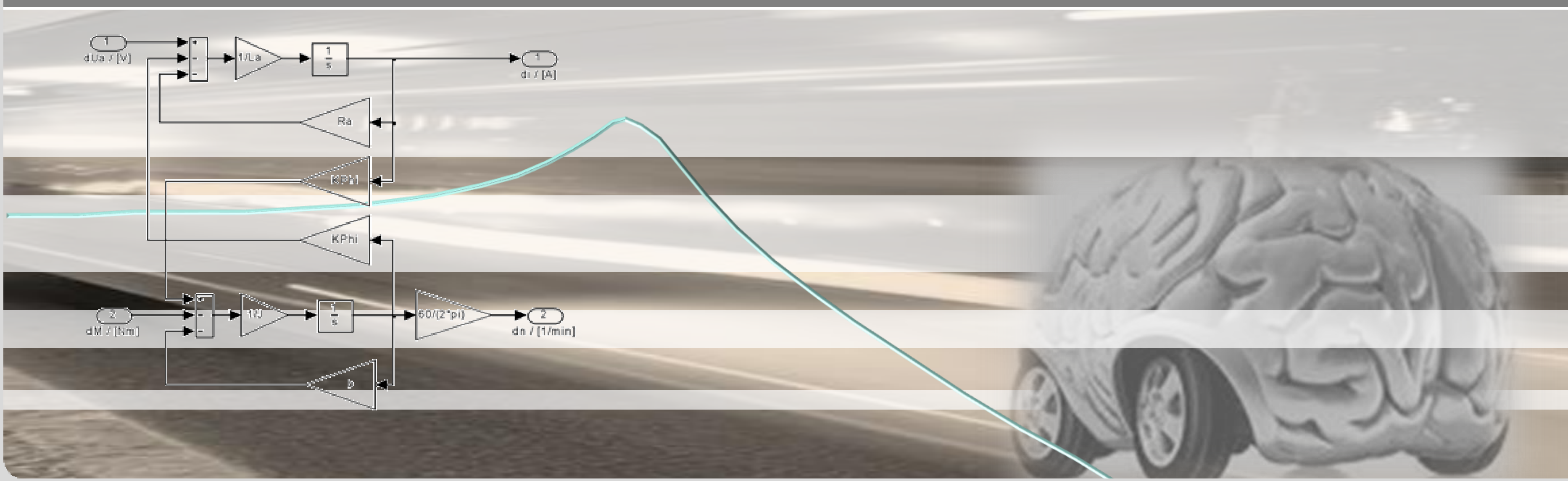
Karlsruher Institut für Technologie

# Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

## Vorlesung: Modellbildung und Identifikation

## Kapitel 4



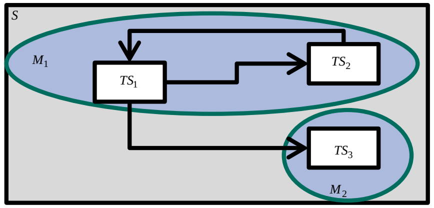
# Übersicht
## Vorlesungsinhalt (1)

### 1. Einführung

1. Motivation
2. Organisatorisches
3. Übersicht
4. Anwendung von Modellen
5. Klassifikation
6. Vorgehen bei der Modellbildung
7. Validierung und Verifikation

### 2. Strukturierung

1. Abgrenzung
2. Strukturiertes System
3. Kausale Modellierung
4. Kopplungsanalyse
5. Strukturierung mit Matlab/Simulink
6. Objektorientierte Modellierung

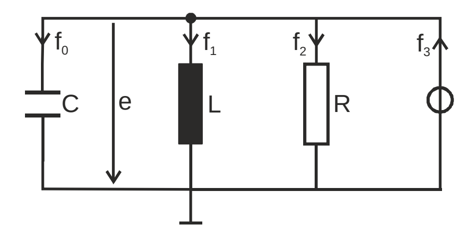


# Übersicht

## Vorlesungsinhalt (2)

## 3. Generalisierte Ersatzschaltbilder

1. Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder
2. Methode der generalisierten Variablen
3. Grundlegende Systemelemente
4. Methode der generalisierten Netzwerkanalyse




## 4. Variationsanalyse

1. Methode der Variationsanalyse
2. Aufstellen der Zustandsgleichungen

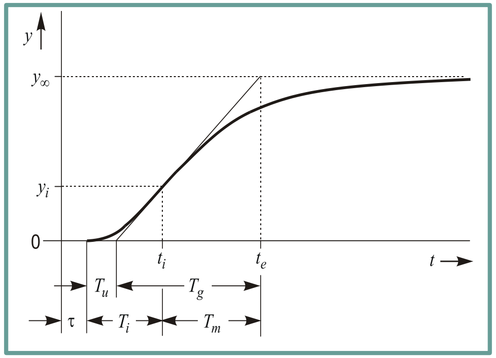
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{e_j}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{e_j}} = F_j^{(Q)} - F_j^{(F)}$$

$$L = T^* - U$$

# Übersicht
## Vorlesungsinhalt (3)

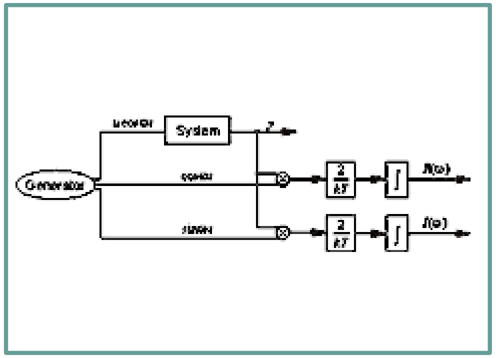
## 5. Identifikation mit parametrischen Modellen

1. Übersicht
2. Kennwertermittlung
3. Least-Square-Verfahren für statische Prozesse
4. Least-Square-Verfahren für dynamische Prozesse
5. Generalized-Least-Square-Methode
6. Methode der Hilfsvariablen
7. Nichtlineare Methoden




## 6. Identifikation mit nichtparametrischen Modellen

1. Frequenzganganalyse
2. Korrelationsanalyse



# 4.1.1 Konfigurationsraum, redundante Koordinaten und Zwangsbedingungen

Ein System besteht aus $N_R$ Energiespeichern. Ordnet man jedem Energiespeicher eine **generalisierte Auslenkung** $\tilde{q}_e$ zu, so bezeichnet man den Vektor

$$\underline{\tilde{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{e_1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{e_{N_R}} \end{bmatrix}$$

als **redundante Koordinate** des Systems.

Die Koordinate $\underline{\tilde{q}}$ bewegt sich innerhalb eines Raums, dem **Konfigurationsraum** $\underline{\tilde{q}} \in K$.

# 4.1.2 Holonome Zwangsbedingung

**Holonome Zwangsbedingung (ZB):**
Die redundanten Koordinaten sind über $N_{ZB}$ algebraische unabhängige Gleichungen verknüpft:

$$h_j(\tilde{q}_{e1},\ldots,\tilde{q}_{N_R},t)=0 \qquad j=1,\ldots,N_{ZB} \quad (*)$$

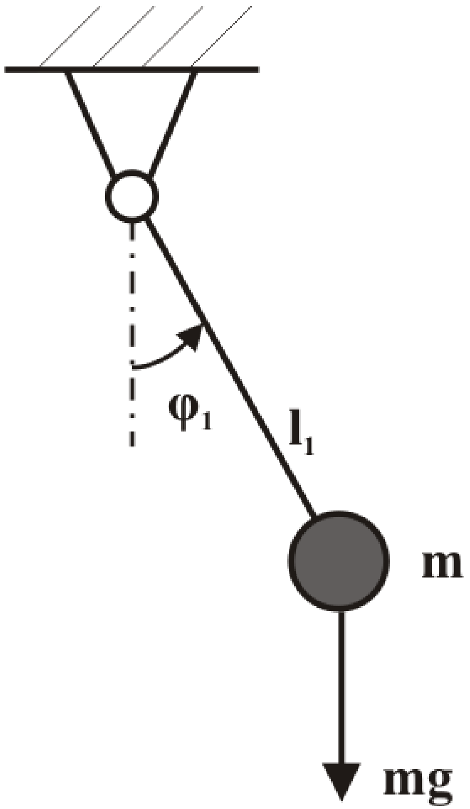
- Sonderfall: **holonome skleronome ZB**:

$$\frac{\partial h_j}{\partial t}=0$$

andernfalls heißen sie **holonome rheonome ZB**

Holonome ZB reduzieren die Anzahl der Elemente der redundanten Koordinaten

$$\boxed{N = N_R - N_{ZB}}$$

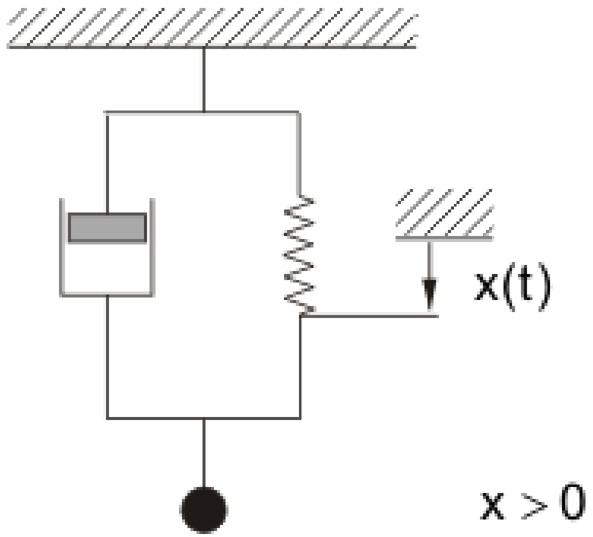


# 4.1.3 Nichtholonome Zwangsbedingung (1)

**nichtholonome ZB**
ist solch eine ZB, die sich nicht durch (*) darstellen läßt.

**a) Ungleichungszwangsbedingung**

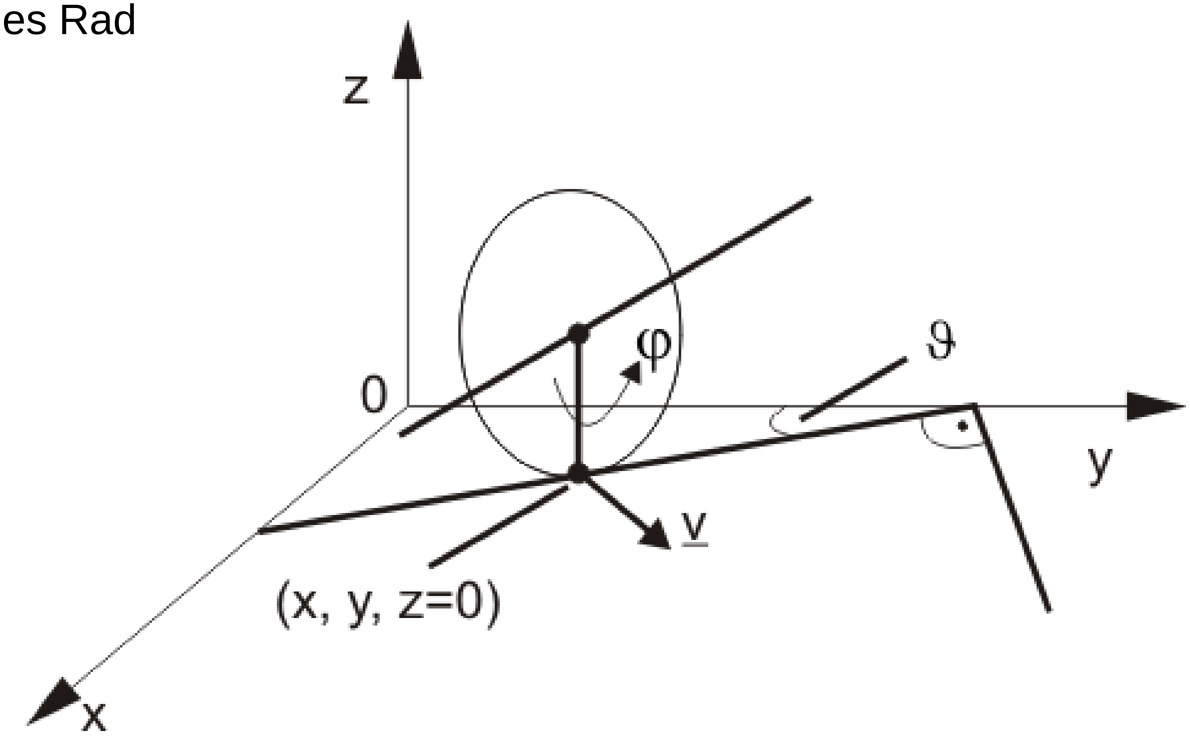
z.B. Feder-Dämpfersystem mit Anschlag



# 4.1.3 Nichtholonome Zwangsbedingung (2)

**b) Zwangsbedingung in differentieller Form**, die sich nicht nach (*) integrieren lässt

z.B. rollendes Rad



# 4.1.4 Beispiel: Rollendes Rad

Zwangsbedingungen sind hier:

1) $\left|\underline{v}\right| = R \cdot \dot{\varphi}$

2) $\left|\underline{v}\right|$ steht senkrecht zur Radachse

$$\dot{x} = \left|\underline{v}\right| \cdot \cos\vartheta$$
$$\dot{y} = \left|\underline{v}\right| \cdot \sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \dot{x} - R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\vartheta = 0$$
$$\dot{y} - R \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\vartheta = 0$$

# 4.1.5 Virtuelle Arbeit

## 4.1.6 Gleichungen nach Euler-Lagrange

# 4.1.7 Euler-Lagrange-Beziehung für elektromech. Systeme

a) Über Transformatoren gekoppelt → holonome Zwangsbedingung
b) Konverter: Energiekonvertierung muss berücksichtigt werden

**ohne Herleitung für ein elektromechanisches System:**

**Gekoppelte Euler-Lagrange-Beziehung**

$$L = L_{mech} + L^*_{elektr}, \quad L_{mech} = T - U, \quad L^*_{elektr} = U^* - T^*$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{e_{mech\,j}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{e_{mech\,j}}} = f_j - f_{dj} \qquad j = 1, \ldots, N_{mech}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{f_{elektr\,j}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{f_{elektr\,j}}} = e_j - e_{dj} \qquad j = 1, \ldots, N_{elektr}$$

$$N = N_{mech} + N_{elektr}$$

# 4.1.8 Energien für lineare Systeme

Wenn linear, dann gilt: $U = U^*$ und $T = T^*$

| | $U = U^*$ | $T = T^*$ | Dissipative Elemente |
|---|---|---|---|
| Masse | $(-mgx)$ | $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ | |
| Feder | $\frac{1}{2} kx^2$ | | |
| Dämpfer | | | $\frac{1}{2} d\dot{x}^2$ |
| Elektr. Kapazität | | $\frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2C} q^2$ | |
| Elektr. Induktivität | $\frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L\dot{q}^2$ | | |
| Elektr. Widerstand | | | $\frac{1}{2} Ri^2$ |

# 4.1.8 Energien für lineare Systeme

| | $U = U^*$ | $T = T^*$ | Dissipative Elemente |
|---|---|---|---|
| Hydr. Tank | | $\frac{1}{2}\frac{A_R}{\rho g}p^2$ | |
| Hydr. Drucktank | | $\frac{1}{2}V_D\kappa p^2$ | |
| Hydr. Induktivität | $\frac{1}{2}\frac{\rho l}{A}p^2$ | | |
| Hydr. Widerstand | | | $\frac{1}{2}\frac{8\mu l}{\pi R^4}p^2$ |
| Pneum. Tank | | $\frac{1}{2}\frac{V_0}{p_0\kappa}p^2$ | |
| Pneum. Induktivität | $\frac{1}{2}\rho\frac{l_0}{A}p^2$ | | |
| Pneum. Widerstand | | | $\frac{1}{2}\frac{12l\mu}{Ab^2}p^2$ |

# 4.2.1 Zustandsgrößen eines Systems (1)

**Definition Zustandsvariablen/Zustandsgrößen:**

Die Zustandsgrößen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ eines dynamischen Systems sind jene inneren Systemgrößen, deren zeitlicher Verlauf für $t_0 < t \leq t_1$ eindeutig bestimmt werden kann, sofern die Anfangswerte

- $x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)$
- und die Eingangsgrößen $u_1(t), \ldots, u_p(t)$

für $t_0 < t \leq t_1$ bekannt sind.

Das System ist durch die Zustandsgrößen vollständig beschrieben. Die Ausgangsgrößen werden durch die $x_i$ bestimmt.

Somit gilt für die hier betrachteten Modelle:

Die Zustandsgrößen können über die verallgemeinerten Koordinaten definiert werden:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= q_1(t) & \qquad x_{N+1}(t) &= \dot{q}_1(t) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_N(t) &= q_N(t) & \qquad x_{n=2N}(t) &= \dot{q}_N(t) \end{aligned}$$

## 4.2 Aufstellen der Zustandsgleichungen

## 4.2.1 Zustandsgrößen eines Systems (2)

Als Eingangsgrößen $u_1(t), \ldots, u_p(t)$ wählt man die Ströme $f_i$ und Spannungen $e_i$ .
Die Ausgangsgrößen ergeben sich aus den Zustandsgrößen:

$$y_i = h_i(x_i, \ldots, x_n) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Man erhält also im allgemeinsten Fall ein nichtlineares implizites Dgl.-System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{\tilde{a}}\left(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, u_1, \ldots, u_p\right) \\ \underline{y} &= \underline{h}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{aligned} \qquad (*)$$

# 4.2.2 Zustandsgrößen eines Systems

Weitere Vorgehensweise:

1. Linearisierung
2. Umwandlung in explizite Differentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x}, \underline{u})$$

$$\underline{y} = \underline{h}(\underline{x})$$

3. Direkte Verwendung von (*)
4. Direkte Verwendung der Euler-Lagrange-Systeme